**Problema 1 – Provocare – Descriere solutie – Autor Andrei Heidelbacher**

10 puncte

Pentru N, A, B ≤ 100, problema admite o soluție simplă ce presupune căutarea liniară a inălțimii minime si construirea unui arbore binar cu număr maxim de noduri cu înălțimea fixată. Complexitatea acestei soluții este O(N \* H), unde H este înălțimea minimă a arborelui.

20 de puncte

Pentru N ≤ 100 000, putem efectua o căutare binară a înălțimii minime și să construim arborele ca în soluția precedentă. Complexitatea este O(N \* log H).

30 de puncte

Pentru N ≤ 1 000 000, putem face o dinamică D[i] = înălțimea minimă a unui arbore binar care are i noduri. Recurența va fi D[i] = min(max(A + D[j], B + D[i – j – 1]), 0 ≤ j < i). Putem observa că șirul D este crescător, iar pentru a găsi valoarea minimă din recurență, ne vom plimba cu doi iteratori. Complexitatea este O(N).

45 de puncte

Pentru A, B ≤ 10 000, vom face o altă dinamică, D[i] = numărul maxim de noduri pe care îl poate conține un arbore cu înălțime i. Recurența va fi D[i] = 1 + D[i – A] + D[i – B]. Această soluție are complexitate O(H), înălțimea fiind aproximată cu max(A, B) \* log N.

100 de puncte

Vom folosi o altă abordare pentru rezolvarea problemei. În primul rând, vom căuta binar înălțimea arborelui, apoi am dori să numărăm toate nodurile care au pe drumul până la rădăcină x muchii de lungime A și y muchii de lungime B (adâncimea acestor noduri fiind x \* A + y \* B). Răspunsul la această întrebare este C(x + y, x) = C(x + y, y). Astfel, numărul maxim de noduri pe care îl poate conține un arbore cu înălțime H este sum(C(x + y, x), x \* A + y \* B ≤ H). Putem presupune fără a pierde din generalitatea soluției că A ≤ B. Vom fixa y numărul de muchii de lungime B, iar numărul maxim de muchii de lungime A va fi x = (H – y \* B) / A. Astfel, numărul nodurilor situate la adâncime cel mult H care au exact y muchii de lungime B pe drumul până la rădăcină va fi sum(C(i + y, i), 0 ≤ i ≤ x) = C(x + y + 1, y + 1). Este suficient să observăm că pentru orice n > 100 și k > 5, avem C(n, k) > 1 000 000 000, deci sumele descrise mai sus vor conține un număr foarte mic de termeni mai mici decat N. Complexitatea finală este aproximativ O(T \* log H \* log N + C), unde C reprezintă numărul combinărilor precalculate (aproximativ 10 000).